Probabilités

En classe de seconde, nous avons introduit des notions de probabilité : expérience aléatoire, événement, probabilité.

En classe de Terminale, nous allons introduire de nouvelles formules qui vont nous permettre de calculer différentes probabilités et améliorer le langage des probabilités.

Activité préparatoire

Corvée de vaisselle…

Pour passer le temps, trois amis décident de jouer aux cartes pour déterminer qui sera de corvée de vaisselle. La règle est la suivante : Avec un jeu de 32 cartes, chaque joueur tire une carte, s'il tire une figure, il gagne. Mélissa tire la première et se demande combien de chances elle a de gagner.

1. Détermination de la probabilité

QUESTION 1

Déterminer toutes les cartes différentes dans un jeu de 32 cartes sans tenir compte de la couleur. (Dans un jeu de cartes, les couleurs sont : Cœur, Carreau, Trèfle, Pique).

……

Corrigé :

Les différentes cartes dans un jeu de 32 cartes sont : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As

QUESTION 2

On note A l'événement permettant de gagner : « On tire une figure ».

Ecrire les résultats correspondant à l'évènement A :

……

Corrigé :

A= {Valet ; Dame ; Roi}

QUESTION 3

Calculer la probabilité $p(A)$ de l'événement A

Corrigé :

- Nombre de cas favorables : 12 (3 figures dans chaque couleur)
- Nombre de cas possibles : 32 (32 cartes au total)
- On en déduit :

$$p\,(A) = \frac{12}{32}$$

QUESTION 4

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A. Définir par une phrase cet événement $\bar{A}$

....

Corrigé :

L'événement $\bar{A}$, contraire de A est : On tire une carte avec un nombre : 7, 8, 9, 10 ou As

QUESTION 5

Déterminer la probabilité de $\bar{A}$:

....

Corrigé :

- Nombre de cas favorables : 20 (5 cartes nombres dans chaque couleur)
- Nombre de cas possibles : 32 (32 cartes au total)
- On en déduit :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{12}{32}$$

2. Simulation d'un tirage de cartes

Pour simuler plus facilement le tirage, on affecte un numéro pour chaque carte selon le tableau de correspondance :

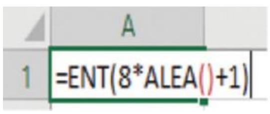
Carte	7	8	9	10	Valet	Dame	Roi	As
N° affecté	1	2	3	4	5	6	7	8

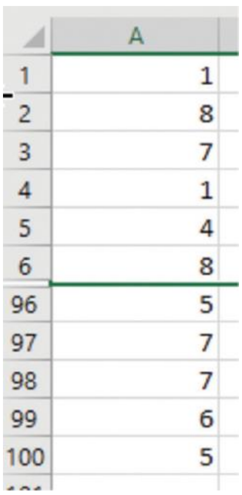
QUESTION 1

Ouvrir une feuille de calcul Excel (ou d'un autre tableur grapheur)

Dans la cellule A1, entrer la formule « =ENT(8*ALEA()+1) » puis copier glisser cette formule jusqu'à la cellule A100.

Que permet d'afficher cette opération ?





Ici la ligne verte masque les cellules A7 à A95

....

Corrigé :

Cette opération permet d’afficher des nombres aléatoires compris entre 1 et 8 inclus, et ce 100 fois.

QUESTION 2

Dans la cellule A102, entrer la formule « =((NB.SI(A1:A100;5)+NB.SI(A1:A100;6)+NB.SI(A1:A100;7))/100)»

Que permet de calculer cette formule ?

102 =((NB.SI(A1:A100;5)+NB.SI(A1:A100;6)+NB.SI(A1:A100;7))/100)

	A
1	6
2	6
3	2
4	8
5	3
6	1
96	2
97	6
98	2
99	3
100	3
101	
102	0,24

....

Corrigé :

Cette formule permet d’afficher la fréquence de sortie des cartes 5, 6 et 7 soit Valet, Dame, Roi.

(Attention ce résultat diffère selon les tirages, vous n’aurez certainement pas la même valeur !)

QUESTION 3

Recopier la colonne A jusqu'à la colonne J. Pour cela sélectionner les cellules A1 à A102 puis faites un copier glisser jusqu'à la colonne J :

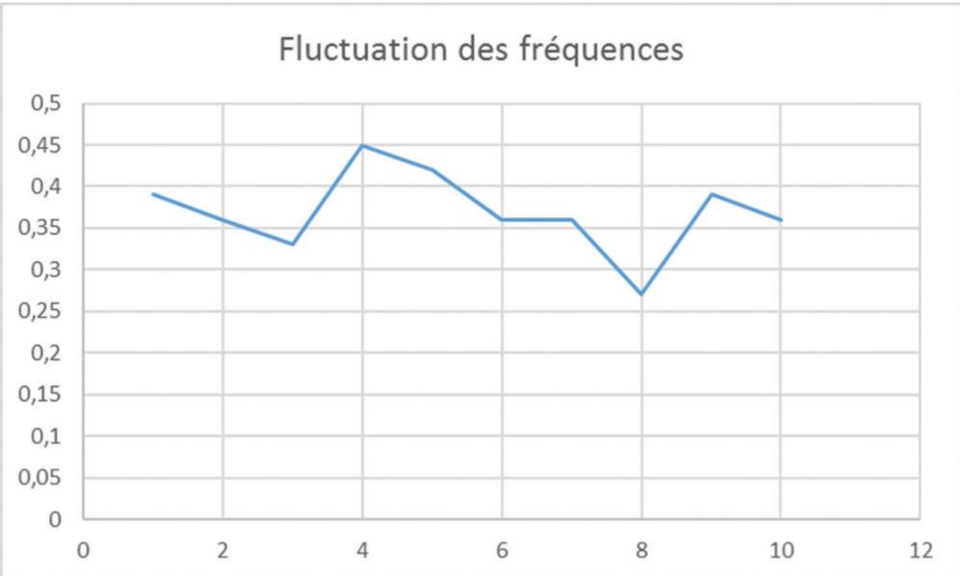
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	4									
2	8									
3	7									
4	4									
5	1									
6	7									
96	7									
97	1									
98	2									
99	8									
100	2									
101										
102	0,24									

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	4	6	1	5	7	5	8	8	2
2	7	2	5	2	2	4	7	8	2	8
3	6	5	8	3	6	8	8	3	4	2
4	8	3	6	1	6	7	3	6	2	1
5	4	7	7	1	6	4	3	2	1	3
6	5	4	5	3	4	2	5	8	1	1
96	4	8	4	1	1	2	3	1	3	8
97	4	3	7	7	7	3	4	6	8	5
98	7	5	8	1	1	4	7	3	1	3
99	1	4	3	5	1	6	4	8	5	8
100	7	2	5	1	4	7	3	3	8	5
101										
102	0,54	0,36	0,45	0,39	0,36	0,24	0,33	0,33	0,3	0,45

Sélectionner alors les cellules A102 à J102 et insérer un graphique en nuage de points. Que représente ce graphique ?

....

Corrigé :



Ce graphique représente la fluctuation des fréquences de sortie des cartes Valet, Dame, Roi

QUESTION 4

Dans la cellule A104, saisir : « =moyenne (A102 : J102) pour calculer la moyenne des fréquences.

104 =MOYENNE(A102:J102)

Quelle est la valeur de cette moyenne ?

Quel résultat retrouve-t-on ?

....

Corrigé :

Cette moyenne est égale à 0,378 (Attention ce résultat diffère selon les tirages, vous n'aurez certainement pas la même valeur)

La probabilité de l'événement était de $\frac{12}{32} = 0{,}375$ On retrouve donc quasiment cette valeur.

La moyenne des fréquences est très proche de la valeur de la probabilité.

Objectifs et essentiel à retenir

I. Objectifs

- Passer du langage probabiliste au langage courant et inversement.
- Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités élémentaires
- Calculer la probabilité d'un événement contraire $\overline{A}$
- Calculer la probabilité de la réunion d'événements incompatibles.
- Utiliser la formule reliant la probabilité de $A \cup B$ et $A \cap B$

II. L'essentiel

1. Vocabulaire des probabilités

- Le résultat d'une expérience aléatoire est dû au hasard
- L'univers Ω d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles
- Un événement est le résultat recherché d'une expérience aléatoire, c'est une partie de l'univers.

- La probabilité d'un événement aléatoire est le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles : $p(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favrables\ à\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$

2. Probabilités d'événements

- A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire.
- L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des cas qui réalisent les **deux** événements A et B.
- La réunion des événements A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble des cas qui réalisent l'un **ou** l'autre des événements A et B.
- La probabilité de la réunion des événements A et B se calcule par la relation :

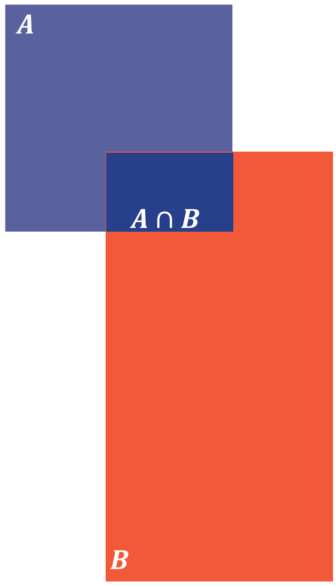
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- L'événement contraire d'un événement A est noté $\overline{A}$
  La probabilité de l'évènement $\overline{A}$:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

- Les événements sont incompatibles si leur réalisation simultanée est impossible.
  Si deux événements A et B sont incompatibles, on a la relation :

$$p(A \cap B) = 0$$



Exercices d'application

EXERCICE 1

Deux événements A et B sont incompatibles. On donne $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,4$

1. Déterminer $p(A \cap B)$
2. Déterminer $p(A \cup B)$

EXERCICE 2

Soient deux événements A et B. On donne $p(A) = 0,6$; $p(B) = 0,3$ et $p(A \cap B) = 0,2$

1. Les deux événements sont-ils incompatibles ?
2. Déterminer $p(A \cup B)$

EXERCICE 3

1. Soit A un événement. Sa probabilité est $p(A) = 0,3$
2. Quel est la probabilité de l'événement contraire à A

PROBLÈME

Une étude statistique menée auprès d'un échantillon représentatif de familles, concernant l'équipement de cuisine, a donné les résultats suivants :

- 80 % ont un four à micro-ondes
- 30 % ont un lave-vaisselle
- 15 % n'ont ni four à micro-ondes ni lave-vaisselle.

On choisit une famille de l'échantillon au hasard.

1. Traduire les pourcentages donnés par des probabilités. On notera $p(F)$ la probabilité que la famille ait un four à micro-ondes, $p(L)$ la probabilité qu'elle ait un lave-vaisselle.

3. Que représente l'événement $\overline{F}$
4. Que représente l'événement $F \cup L$?
5. Calculer $p(F \cup L)$.
6. Calculer la probabilité que la famille ait un four à micro-ondes et un lave-vaisselle.

Correction

EXERCICE 1

Comme A et B sont deux évènements incompatibles alors $p(A \cap B) = 0$

D'après le cours $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0$

$p(A \cup B) = 0{,}6$

EXERCICE 2

1. $p(A \cap B)$ est différent de 0 donc les deux événements ne sont pas incompatibles.
2. $p(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}7$

EXERCICE 3

Soit A un événement. Sa probabilité est $p(A) = 0{,}3$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

$p(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

PROBLÈME

1.

- 80 % ont un four à micro-ondes

  $80\ \% = 0{,}8$

  Donc $p(\mathrm{F}) = 0{,}8$

- 30 % ont un lave-vaisselle

  $30\ \% = 0{,}3$

  Donc $p(\mathrm{L}) = 0{,}3$

2. L'événement $\overline{F}$ est l'événement contraire de F donc c'est l'événement : La famille n'a pas de four à micro-ondes.

3. L'événement $F \cup L$ est la réunion de l'événement F et L cela correspond donc à l'événement : La famille a un four à micro-ondes **ou** un lave-vaisselle.

4. D'après le cours, on a la formule : $p(F \cup L) = p(F) + p(L) - p(F \cap L)$

   L'événement $F \cap L$ correspond à l'événement : La famille a un four à micro-ondes ET un lave-vaisselle.

   L'événement $\overline{F \cap L}$ correspond à l'événement : La famille n'a ni four à micro-ondes ni lave-vaisselle.

   On connait la probabilité de l'événement $\overline{F \cap L}$

   Elle est égale à $0{,}15\,(15\,\%)$.

   Ainsi on a : $p(F \cap L) = 1 - p\left(\overline{F \cap L}\right)$

   $p(F \cap L) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

   Ce qui nous donne : $p(F \cup L) = p(F) + p(L) - p(F \cap L)$

   $p(F \cup L) = 0{,}8 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}95$

   95 % des familles ont soit un four à micro-ondes soit un lave-vaisselle.

5. L'événement : La famille a un four à micro-ondes et un lave-vaisselle est l'événement $F \cap L$
   Probabilité que l'on a déjà calculé : $p(F \cap L) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$