Comment étudier une fonction à l'aide des fonctions dérivées ?

Une grande PME souhaite connaître l'impact des frais de publicité dépensés sur son chiffre d'affaire.

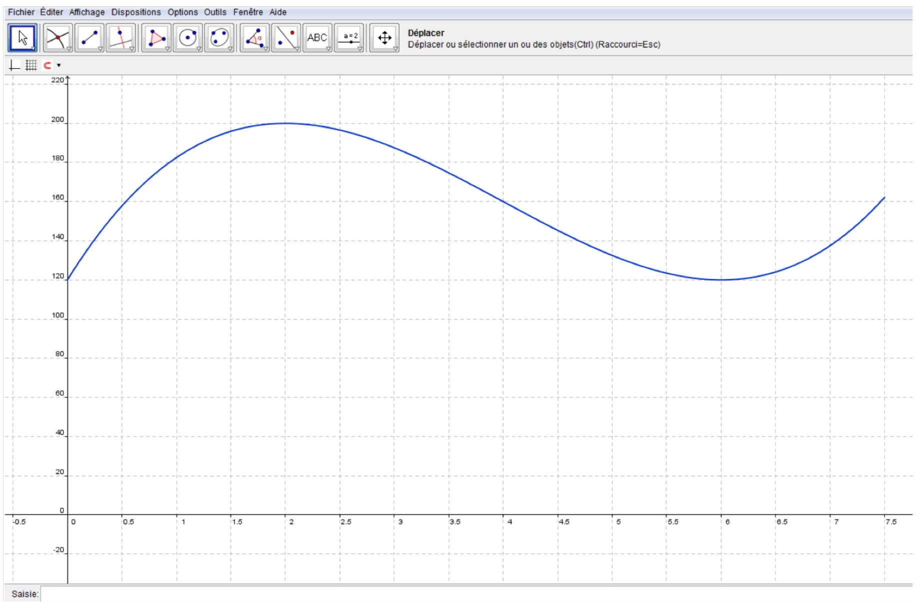
Comment analyser l'évolution du chiffre d'affaire en fonction du montant des frais de publicité engagés ?

L'évolution du chiffre d'affaire (en milliers d'euros) en fonction du montant des frais de publicité engagés peut être modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 7,5] par :

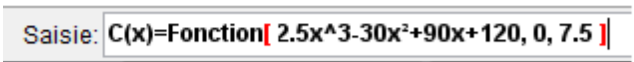
$$C(x) = 2{,}5x^3 - 30\,x^2 + 90\,x + 120$$

Où x désigne le montant des frais de publicité en milliers d'euros

La courbe représentative de cette fonction est donnée ci-dessous :

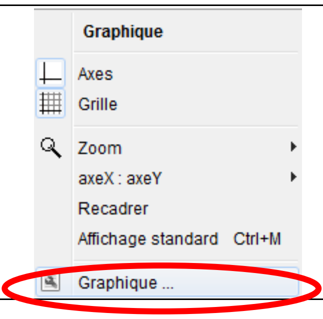


Nous avons vu que la dérivée d'une fonction permettait de connaitre avec exactitude la valeur maximale d'une fonction. En quoi la dérivée d'une fonction permet-elle de caractériser une fonction ?

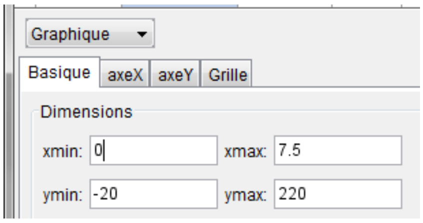
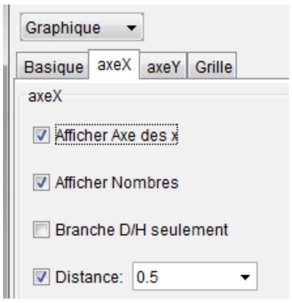


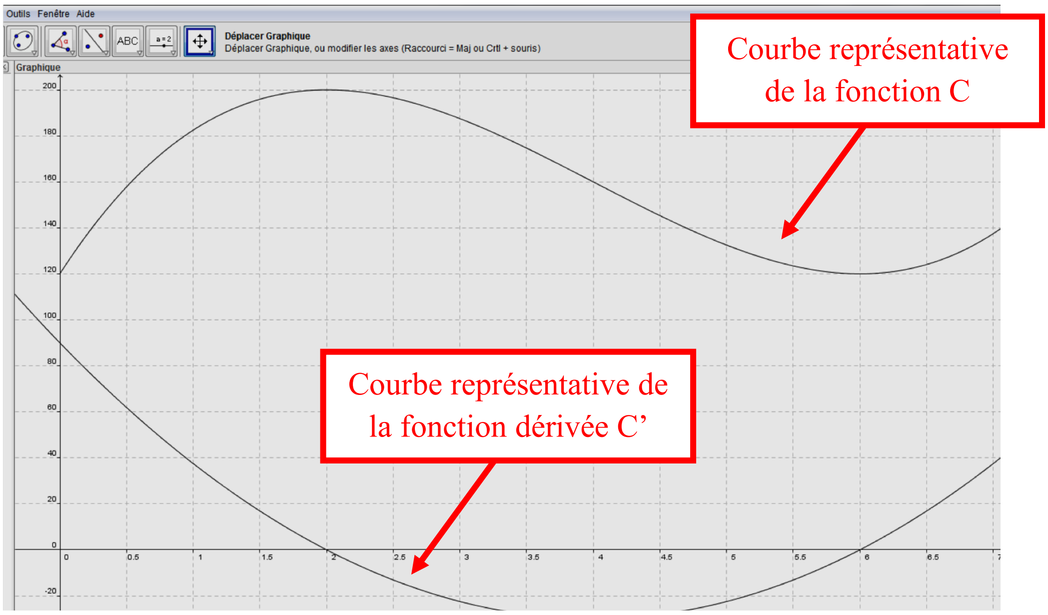
Dans la fenêtre de saisie introduire l'expression de la fonction C

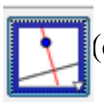
La courbe n'apparait pas car il faut recadrer le repère avec les bonnes valeurs :

	- Clic droit sur le repère - Sélectionner graphique

Comment étudier une fonction à l'aide des fonctions dérivées ?

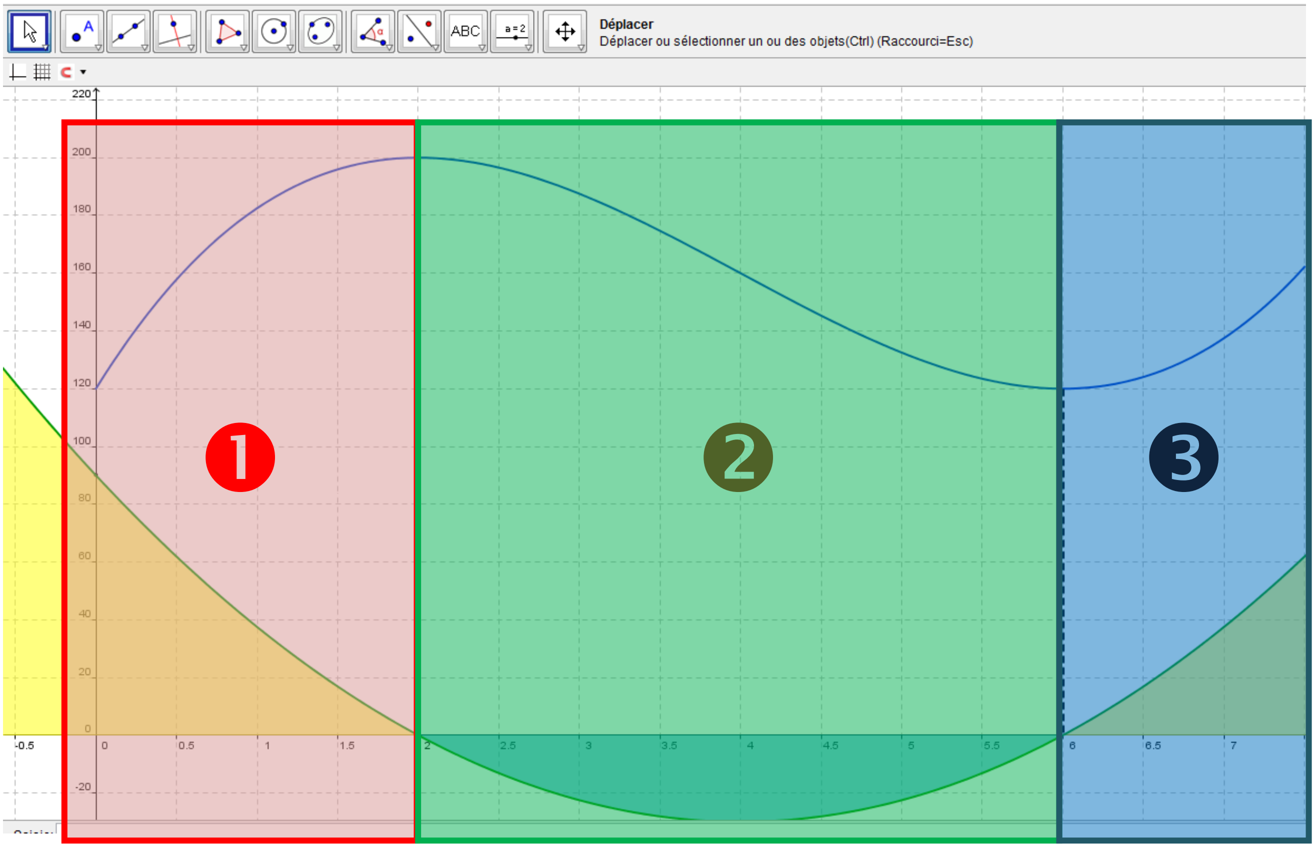
Dans l'onglet « Basique » introduire les valeurs ci-contre	
	- Dans l'onglet « axeX » on définit l'unité graphique en abscisse dans la partie « Distance » : dans notre cas, on prend 0,5 - Puis dans l'onglet « axeY » on définit l'unité graphique en ordonnée : dans notre cas, on prend 20
On trace la courbe représentative de la fonction dérivée C'. Dans la fenêtre de saisie :	



Après avoir placé les points d'intersection  de la courbe représentative de la fonction C avec l'axe des abscisses, on trace la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par chacun des points A et B obtenus : (que l'on trace en pointillés)

On remarque trois parties importantes sur cette représentation graphique :

Comment étudier une fonction à l'aide des fonctions dérivées ?



❶	**La fonction est croissante, et la fonction dérivée est positive sur l'intervalle [0 ; 2]**

❷	**La fonction est décroissante, et la fonction dérivée est négative sur l'intervalle [2 ; 6]**

❸	**La fonction est croissante, et la fonction dérivée est positive sur l'intervalle [6 ; 7,5]**

Soit f, une fonction définie sur un intervalle I = [a ; b].

- ***Si, pour tout nombre x_0 de I , le nombre dérivé $f'(x_0)$ est <u>POSITIF</u> alors la fonction f est strictement <u>CROISSANTE</u> sur l'intervalle I.***

- ***Si, pour tout nombre x_0 de I , le nombre dérivé $f'(x_0)$ est <u>NEGATIF</u> alors la fonction f est strictement <u>DECROISSANTE</u> sur l'intervalle I.***

Comment étudier une fonction à l'aide des fonctions dérivées ?

On peut établir ces résultats dans un tableau que l'on appelle un ***TABLEAU DE VARIATIONS***.

x	0		2		6		7,5
Signe de la dérivée C'(x)		+	0	-	0	+	
Variations de la fonction C	120	↗	200	↘	120	↗	169,2

Remarque : Pour déterminer les valeurs que prend la fonction C en 0, il suffit de taper dans la fenêtre de saisie : Saisie: C(0) (même méthode pour les autres valeurs)

Ce tableau de variation nous indique qu'en $x = 2$ et $x=6$ la dérivée s'annule (on note alors $C'(x) = 0$) et change de signe. Ceci donne lieu à la règle suivante :

Si la dérivée s'annule en un point d'abscisse x_0 <u>en changeant de signe</u>, alors cette fonction admet au point d'abscisse x_0 un extremum (minimum ou maximum)

<u>*CONCLUSION GENERALE*</u>

Cette étude nous montre que le chiffre d'affaire augmente jusqu'à sa valeur maximale de 200 000 € pour des frais de publicité s'élevant à 2 000 €. Ce chiffre d'affaire décroit ensuite jusqu'à sa valeur minimale de 120 000 € pour un montant de frais de publicité de 6 000 € pour enfin croître à nouveau.