Chapitre N°2 : Comment calculer et utiliser les fonctions dérivées ?

Afin de faire des économies d'énergie, M. RADIN décide d'installer une pompe à chaleur (PAC).

Comment déterminer avec précision la puissance maximale délivrée par cette PAC ?

Consommation électrique (alimentation PAC)

Puissance distribuée dans la maison

La puissance distribuée dans la maison est modélisée par la fonction P définie sur l'intervalle [2 ; 5,5] par :

$$P(x) = x^3 - 15{,}5\,x^2 + 71\,x - 88$$

Où x désigne la consommation électrique de la PAC en kW

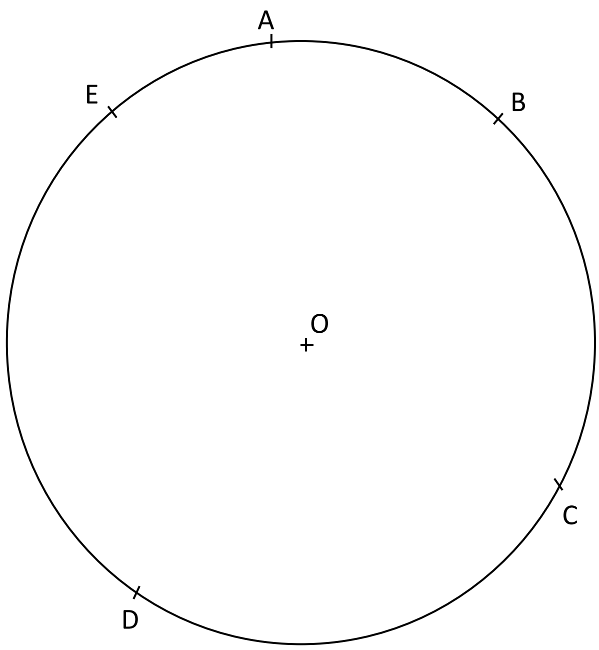
Avec GEOGEBRA ou encore avec la calculatrice, il est difficile de déterminer le maximum de la fonction définie précédemment…

Notion de tangente

Au collège, on donne la définition suivante pour une tangente à un cercle en un point donné de ce cercle :

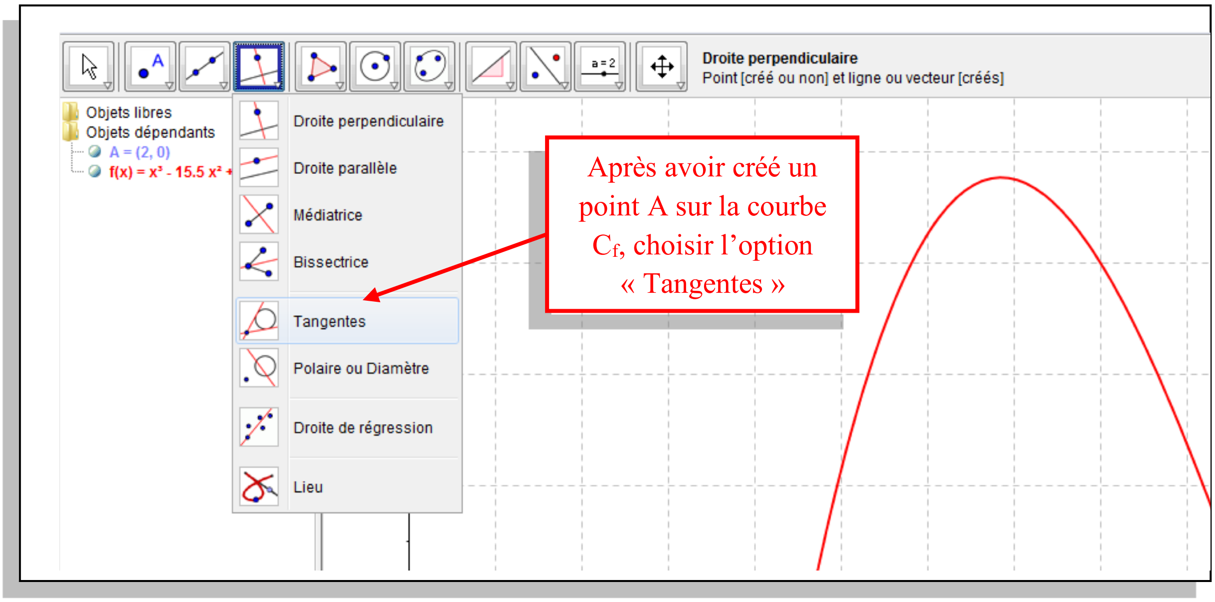
« Soit C un cercle de centre O. Soit H un point du cercle. La tangente au cercle en H est la droite qui passe par H et qui perpendiculaire au rayon [OH]. »

Traçons, en chacun des points A, B, C, D et E la tangente au cercle ©.



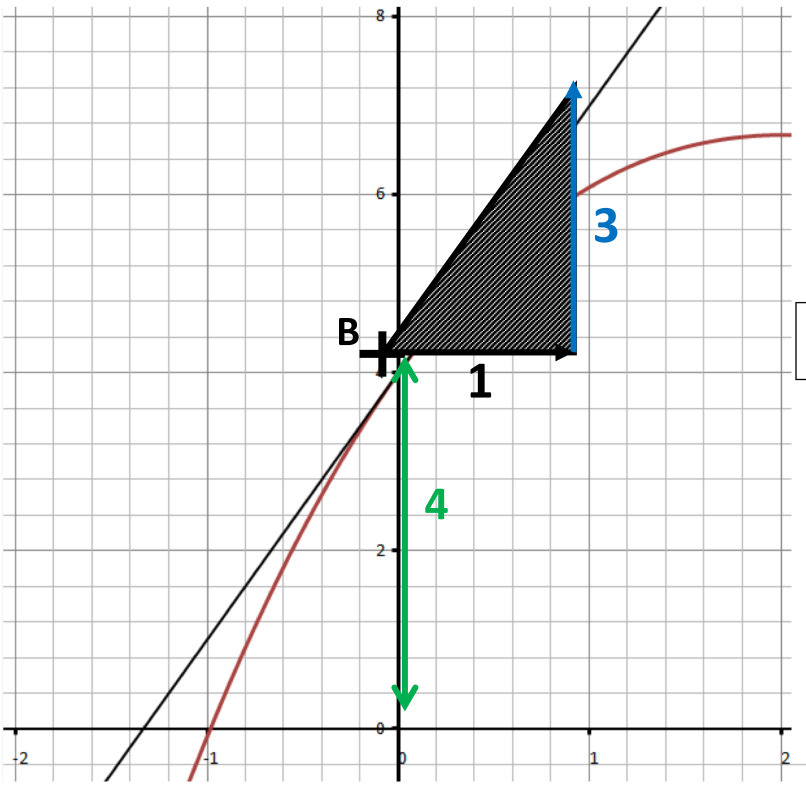
Grâce à la figure, on remarque facilement que pour chaque cas, la tangente est une droite qui n'admet qu'un seul point commun avec le cercle ©. (C'est d'ailleurs une propriété qui a également été vue au collège !)

Pour la courbe représentative d'une fonction, c'est le même principe…



En modifiant la position du point A sur la courbe, on s'aperçoit que la tangente change de direction : la courbe représentative d'une fonction possède donc une ***INFINITE de tangentes***.

Pour caractériser la direction d'une droite, et donc d'une tangente on détermine sa ***PENTE*** (ou ***COEFFICIENT DIRECTEUR***)



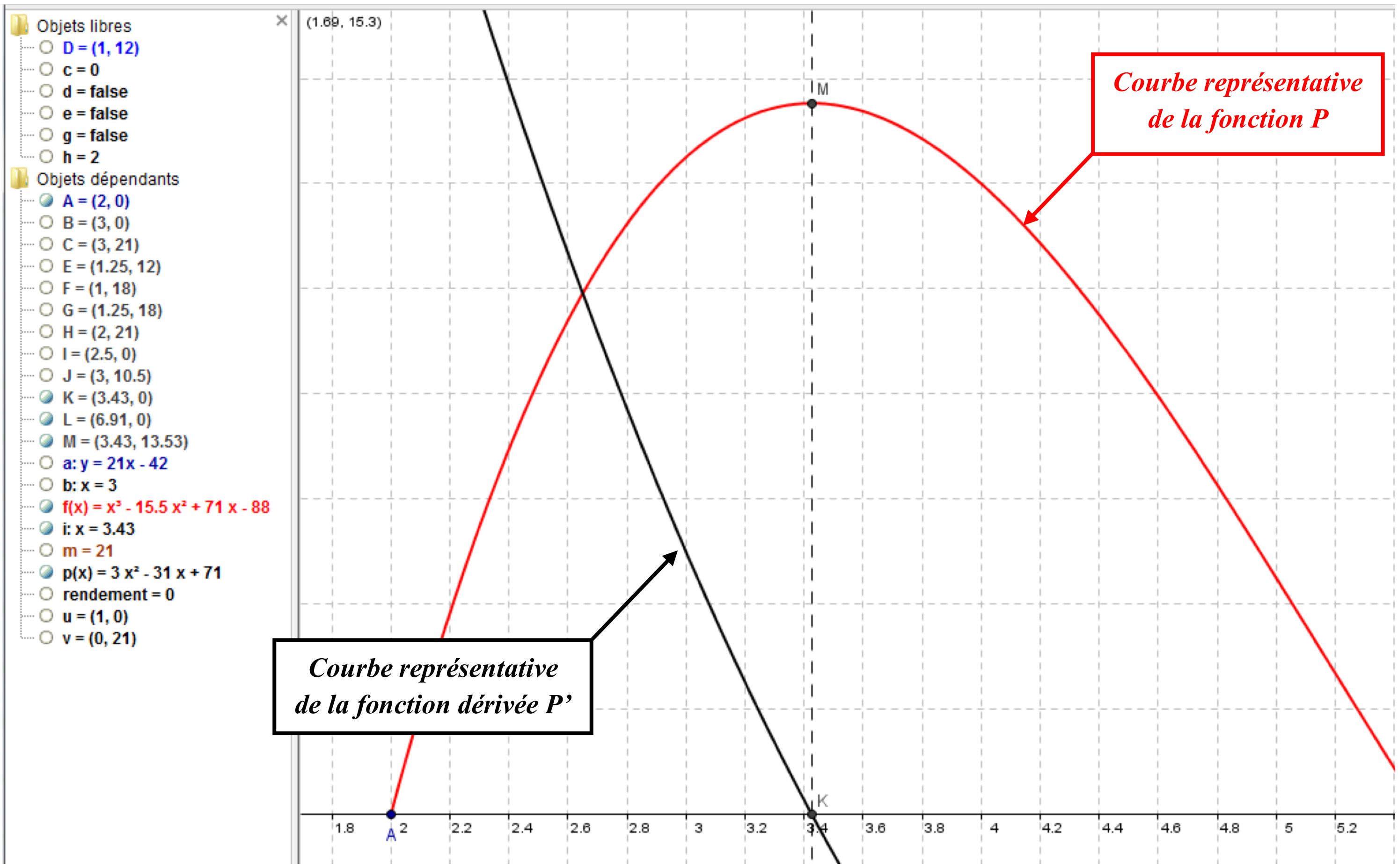
Dans l'exemple ci-contre, la tangente à la courbe au point B a pour équation :

$$\boxed{T_B : y = 3x + 4}$$

Le coefficient directeur **3** est appelé ***NOMBRE DERIVE DE LA FONCTION f*** au point B d'abscisse 0.

Remarque : A chaque point de la courbe représentative de la fonction ***P*** est associée une tangente différente et donc un nombre dérivé différent : l'ensemble de ces nombres dérivés est appelée ***FONCTION DERIVEE DE LA FONCTION P*** (notée ***P'(x)***) sur l'intervalle [2 ; 5,5]).

On dit alors que la fonction P est ***DERIVABLE sur l'intervalle [2 ; 5,5]***.



La puissance délivrée par la pompe à chaleur atteint sa valeur maximale lorsque la fonction dérivée qui lui est associée est nulle.

En réponse à la question posée en introduction, cette valeur maximale est de 13,53 kW pour une consommation électrique de 3,43 kW. Ces valeurs représentent les coordonnées du point M sur la fenêtre GEOGEBRA ci-dessus.

Comment calculer la fonction dérivée d'une fonction usuelle ?

Vous pouvez vous aider de la vidéo :« derivee_carrée? ».
A l'aide de cette vidéo, créez un fichier GEOGEBRA permettant de conjecturer sur l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

FONCTION CUBE : $g(x) = x^3$

La fonction dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

APPR.		
0	1	2

REAL.		
0	1	2

VAL.		
0	1	2

FONCTION RACINE CARREE : $u(x) = \sqrt{x}.$

La fonction dérivée de la fonction u sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

APPR.		
0	1	2

REAL.		
0	1	2

VAL.		
0	1	2

FONCTION INVERSE : $s(x) = \frac{1}{x}$

La fonction dérivée de la fonction s sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

APPR.		
0	1	2

REAL.		
0	1	2

VAL.		
0	1	2

	Fonction f	***Dérivée f'***
	f(x)	***f ' (x)***
1	$ax + b$	a
2	x^2	$2x$
3	x^3	
4	$\frac{1}{x}$	
5	$\sqrt{x}$	

Application directe :

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

1) $f(x) = 7x + 5$
2) $g(x) = -9x + 4$
3) $h(x) = \frac{2}{3}\, x - 1$
4) $i(x) = 5x^2 + \frac{4}{x} - 2$
5) $p(x) = 14\, x^2 - 12\, x + \frac{2}{5}$
6) $t(y) = 18\, y^2 - 4y + 8$
7) $d(t) = 6\, t^3 - 7\, t^2 + 9{,}4$
8) $s(x) = -\frac{8}{3}\, x^3 + \frac{9}{2}\, x^2 - 2{,}8\, x + 8{,}6$